# 实验五 代数方程模型实验

## 实验目的

**案例6课后习题：**

1. 理解向量、向量的线性组合与线性表示、向量组的线性相关与线性无关、最大线性无关组的概念；

2. 掌握向量组线性相关和线性无关的有关性质及判别法；

3. 掌握向量组的最大线性无关组和秩的性质和求法；

**案例7课后习题：**

1. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解的概念；

2. 掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法；

3. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念；

4. 掌握非齐次线性方程组的基础解系和通解的求法。

**案例8课后习题：**

1. 掌握特征值、特征向量、特征方程、矩阵的对角化等概念和理论；

2. 掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法；

3. 理解由差分方程

4. 所描述的动态系统的长期行为或演化；

5. 提高对离散动态系统的理解与分析能力。

## 基本概念

**1. 线性相关和线性无关**

线性相关性：对s个n维向量，若存在一组不全为零的数

，使得





则称向量组线性相关；否则称向量组线性无关，即不存在不全为零的数，使得成立。

**2. 最大线性无关组**

最大线性无关组所含向量的个数等于给定向量组的秩。可以利用初等行变换，将以向量组的每个向量为列而形成的矩阵化为行最简形，最后所得矩阵之非零列的序号就是最大线性 无关组内向量的序号。

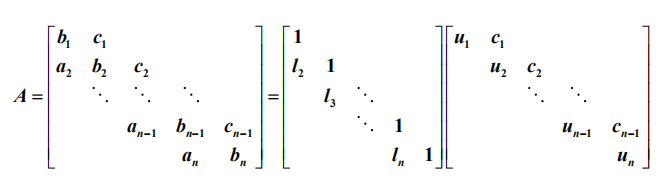
**3. 网络流**

一个网络由一个点集以及连接部分或全部点的直线或弧线构成。网络中的点称作联结点（或节点），网络中的连接线称作分支。每一分支中的流量方向已经指定，并且流量（或流 速）已知或已标为变量。

网络流的基本设想是网络中流入和流出的总量相等，并且每个联结点流入和流出的总量也相等。

**4. 三对角形线性方程组的追赶法**

将n 阶矩阵 A 的 LU 表为



L 和U 的计算公式为



**5. 特征值与特征向量**

设A为n阶方阵，若存在n维非零向量v使得



则称数为A的特征值，并称非零向量v为A的属于的特征向量。

从几何上来看，特征向量v的方向经过A作用后，保持在同一条直线上，这时或者方向不变，或者方向相反，至于时，特征向量就被变成0。

如果v是矩阵A的属于特征值的特征向量，那么v的任何一个非零倍数 kv也是A的属于特征值 的特征向量。这说明特征向量不是被特征值所唯一决定的。相反，特征值却是被特征向量所唯一决定的，因为，一个特征向量只能属于一个特征值。

**6 离散线性动态系统**

### 形如



的差分方程，描述了系统随时间的变换，通常称为动态系统（Dynamical system）或离散线性动态系统（Discrete linear dynamical system）。动态系统理论的基本目的是了解迭代过程的最终或渐进性态，即希望了解随着k增大，迭代点的最终性态。就是说，这些点跑到哪里去？它们到达那里又在干些什么？

## 实验内容

### 问题1

某中药厂用 9 种中草药A-I，根据不同的比例配制成了 7 种特效药，各用量成分见Tab-1（单位：克）。

**Table 1 7种特效药的成分**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **中药** | **1号成药** | **2号成药** | **3号成药** | **4号成药** | **5号成药** | **6号成药** | **7号成药** |
| A | 10 | 2 | 14 | 12 | 20 | 38 | 100 |
| B | 12 | 0 | 12 | 25 | 35 | 60 | 55 |
| C | 5 | 3 | 11 | 0 | 5 | 14 | 0 |
| D | 7 | 9 | 25 | 5 | 15 | 47 | 35 |
| E | 0 | 1 | 2 | 25 | 5 | 33 | 6 |
| F | 25 | 5 | 35 | 5 | 35 | 55 | 50 |
| G | 9 | 4 | 17 | 25 | 2 | 39 | 25 |
| H | 6 | 5 | 16 | 10 | 10 | 35 | 10 |
| I | 8 | 2 | 12 | 0 | 2 | 6 | 20 |

试解答：

1. 某医院要购买这7种特效药，但药厂的第3号药和第6号药已经卖完，请问能否用其他特效药配制出这两种脱销的药品。
2. 现在该医院想用这7种草药配制三种新的特效药，表Tab-2给出了三种新的特效药的成分，请问能否配制？如何配制？

**Table 2 3种新特效药的成分**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **中药** | **1 号新药** | **2 号新药** | **3 号新药** |
| A | 40 | 162 | 88 |
| B | 62 | 141 | 67 |
| C | 14 | 27 | 8 |
| D | 44 | 102 | 51 |
| E | 53 | 60 | 7 |
| F | 50 | 155 | 80 |
| G | 71 | 118 | 38 |
| H | 41 | 68 | 21 |
| I | 14 | 52 | 30 |

#### 问题分析

首先，将实际问题线性代数化，把每一种特效药含有的成分看成一个 7 维的列向量,则7种特效药对应7个9维的列向量，分别记为：



**步骤一：**

分析这7个列向量构成的向量组的线性相关性。若向量组线性无关，则必须购买所有种类特效药；若向量组线性相关，则他可以只购买其中一部分特效药并用它们配制出其余几种特效药。

设1、2、3、4、5、6、7号成药对应的中药组合分别为向量，根据Tab-2将他们赋值。再构建一个总的A矩阵。

**步骤二：**

为了确定最小特效药集合，必须确定向量组的一个最大线性无关组。所以利用公式找出A的行最简形和一组最大线性无关组。根据A0确定最大无关组有哪些。

**步骤三：**

确定哪些线性无关组满足实际意义（该线性无关组表示其它向量的系数全为正），即用来表示另外向量时系数均为正数，这一步可由MATLAB逐步实现。

**步骤四：**

根据题目要求的特效药集合，用rref()公式可以求得行最简式，看是否可以用最大无关组表示出（2）问需要的特效药集合，或者用公式进行求解。

#### 实验程序

%%问题一代码

clc

clear all

a1 = [10 12 5 7 0 25 9 6 8]'; %建立七种特效药的向量

a2 = [2 0 3 9 1 5 4 5 2]';

a3 = [14 12 11 25 2 35 17 16 12]';

a4 = [12 25 0 5 25 5 25 10 0]';

a5 = [20 35 5 15 5 35 2 10 2]';

a6 = [38 60 14 47 33 55 39 35 6]';

a7 = [100 55 0 35 6 50 25 10 20]';

A = [a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7];

[A0, jb] = rref(A) %求出A的行最简形和一组最大线性无关组

rank(A)

%%问题二代码

%秩为6, 又a4 a5 a6 a7一定存在，所以三种情况[a1 a2 a4 a5 a6 a7],

% [a1 a3 a4 a5 a6 a7], [a2 a3 a4 a5 a6 a7]

B1 = [a1 a2 a4 a5 a6 a7]; %检测[a1 a2 a4 a5 a6 a7]

x1 = B1\a3

B2 = [a1 a3 a4 a5 a6 a7]; %检测[a1 a3 a4 a5 a6 a7]

x2 = B2\a2

B3 = [a2 a3 a4 a5 a6 a7]; %检测[a2 a3 a4 a5 a6 a7]

x3 = B3\a1

%选择[a1 a2 a4 a5 a6 a7]，只有该线性无关组表示其它向量的系数全为正

b1 = [40 62 14 44 53 50 71 41 14]';

y1 = [a1 a2 a4 a5 a6 a7]\b1

b2 = [162 141 27 102 60 155 118 68 52]';

y2 = [a1 a2 a4 a5 a6 a7]\b2

b3 = [88 67 8 51 7 80 38 21 30]';

y3 = [a1 a2 a4 a5 a6 a7]\b3

#### 实验结果

**问题一：**

A0 =

1 0 1 0 0 0 0

0 1 2 0 0 0 0

0 0 0 1 0 0 0

0 0 0 0 1 0 0

0 0 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 0 1

0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0

jb =

1 2 4 5 6 7

ans =

6

x1 =

1.0000

2.0000

0.0000

0.0000

-0.0000

0.0000

**问题二：**

y1 =

1.0000

3.0000

2.0000

-0.0000

0.0000

-0.0000

y2 =

3.0000

4.0000

2.0000

0.0000

-0.0000

1.0000

y3 =

1.1322

7.4379

2.1718

2.3827

-2.0645

0.6844

#### 结果分析

1. 根据问题一中的rref()函数计算结果可知，矩阵A的秩为6，其中线性无关组一定包括a4 a5 a6 a7，所以有三种情况[a1 a2 a4 a5 a6 a7], [a1 a3 a4 a5 a6 a7], [a2 a3 a4 a5 a6 a7]，分别测试这几个线性无关组表示另外一个向量时系数是否均为正，结果显示只有[a1 a2 a4 a5 a6 a7]满足题意。于是选择该线性无关组进行后面题目的求解。
2. 将三种新药对应创建向量b1 b2 b3，看能否用（1）中的线性无关组表示他们，用求解系数矩阵yi。则新药可以表示为：求解结果：

；；



所以第一第二种药可以表示，第三种药不可以，配置公式如上所示。

### 问题2

（营养食谱问题）一个饮食专家计划一份膳食，提供一定量的维生素C、钙和镁。其中用到3种食物，它们的质量用适当的单位计量。这些食品提供的营养以及食谱需要的营养如下表给出

**Table 3 营养食谱问题**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 营养 | 单位食谱所含的营养（毫克） | | | 需要的营养总量（毫克） |
| 食物 1 | 食物 2 | 食物 3 |
| 维生素C | 10 | 20 | 20 | 100 |
| 钙 | 50 | 40 | 10 | 300 |
| 镁 | 30 | 10 | 40 | 200 |

针对这个问题写出一个向量方程。说明方程中的变量表示什么，然后求解这个方程。

#### 问题分析

首先，设食物1、2、3的单位质量分别为x1 x2 x3，设三种食物单位质量的营养含量向量为a1 a2 a3，维生素C、钙和镁的总含量向量是y。所以有：

进一步列方程：



通过求解上面方程，得到x解的情况。

#### 实验程序

%%代码

clc

a1 = [10 50 30]'; %各种食物单位质量营养

a2 = [20 40 10]';

a3 = [20 10 40]';

y = [100 300 200]';

A = [a1 a2 a3]';

rank([a1 a2 a3]) %求解秩

%%秩为3，所以有唯一解

x = A\y

#### 实验结果

ans =

3

x =

15.1515

0.6061

-2.7273

#### 结果分析

三种食物的单位质量求解结果为15.1515 0.6061 -2.7273质量存在负数，所以不成立，无解。

### 问题3

在美国黄衫森林中，斑点猫头鹰主要以鼹鼠为食。假设这两个种群的捕食者-被捕食者矩阵为。

1. 证明：如果捕食参数p = 0.325，则两个种群都会增长。估计长期增长率及猫头鹰与鼹鼠的最终比值。
2. 证明：如果捕食率为p = 0.5，则猫头鹰和鼹鼠最终都将灭绝。
3. 试求一个p值，使得猫头鹰和鼹鼠的数量都趋于稳定。此时，对应的种群数量是多少？

#### 问题分析

根据题意可知，差分方程为，其中。

对问题（1），通过输入捕食参数0.325求出特征值、特征向量并对他们重新排序，将求出的特征向量整数化，然后代入通式可以求出第k年后捕食者与被捕食者直接的数量关系。

同理，对问题（2）采取类似问题（1）的解决方法即可。

对问题（3），需要先解出当时存在的捕食参数p，然后再类似（1）问求解，求解方程可以用solve()函数。

#### 实验程序

clc

clear all

%%模板

syms p;

A = [0.4 0.3;-p 1.2]; %建立捕食者矩阵

[r,lambda] = eig(A) % 求A的特征值和对应的特征向量

[lambda\_norm,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %按特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I); % 输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

r = r(:,I) % 与特征值对应的特征向量

%% 问题1）代码

p = 0.325;

[lambda\_norm,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %按特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I); % 输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

lambda1 = simplify(subs(lambda)) %简化函数(简化后才能得到分数结果进行下一步操作)加求解函数

r1 = simplify(subs(r))

%% 问题2）代码

p = 0.5;

[lambda\_norm,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %按特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I); % 输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

lambda2 = simplify(subs(lambda)) %简化函数(简化后才能得到分数结果进行下一步操作)加求解函数

r2 = simplify(subs(r))

%% 问题3）代码

p1 = solve(lambda==[1;1]) %特征值确定为1

p = p1;

[lambda\_norm,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %按特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I); % 输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

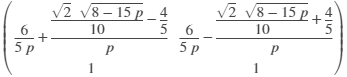
lambda3 = simplify(subs(lambda)) %简化函数(简化后才能得到分数结果进行下一步操作)加求解函数

r3 = simplify(subs(r))

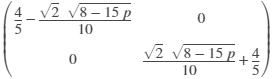
#### 实验结果

在实时脚本窗口导出输出结果：

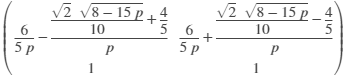
r =



lambda =



r =



lambda1 =



r1 =



lambda2 =



r2 =



p1 =



lambda3 =



r3 =



#### 结果分析

通过定义符号变量完成对三个题目的求解。

1）代入*p* = 0.325时，特征值，对应的特征向量线性无关。为了消除小数，将r1转化为如下特征向量：



于是有：



当*k*很大时，有，即



进一步分析第k月和第k+1月的关系：



这说明，猫头鹰和鼹鼠的数量每个月都会在上一个月的基础上增加到1.05倍，所以两个种族都不会灭绝且数量都在增长。根据中元素的比值约为6：13可知：猫头鹰与鼹鼠的最终比值为6/13。

2）同样的，当代入p = 0.5，可得：特征值，特征向量，有：



当k很大时，有，则。所以猫头鹰和鼹鼠最终都将灭绝。

3）根据solve函数求解，可以得到当p = 0.4，特征值，对应的特征向量显然线性无关。为消除小数，我们选取如下特征向量：



同第（1）问，最后可得到



即当*p* = 0.4时，在若干月后猫头鹰和鼹鼠的数量都将趋于稳定，数量比为

1：2。

### 问题4

杂交育种的目的是培养优良品种，以提高农作物的产量和质量。如果农作物的三种基因型分别为 AA，Aa，aa，其中 AA 为优良品种。农场计划采用 AA 型植物与每种基因型植物相结合的方案培育植物后代，已知双亲体基因型与其后代基因型的概率（见下表）。问：经过若干年后三种基因型分布如何？要求：

（1）建立代数模型，从理论上说明最终的基因型分布。

（2）用 MATLAB求解初始分布为 0.8，0.2，0 时，20 年后的基因分布，是否已经趋于稳定？

**Table 4 基因的转移**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 概率 | | 父体-母体基因型 | | |
| AA-AA | AA-Aa | AA-aa |
| 后代的基因型 | AA | 1 | 1/2 | 0 |
| Aa | 0 | 1/2 | 1 |
| aa | 0 | 0 | 0 |

#### 问题分析

根据题意可知离散动态系统的差分方程为，其中。

对问题（1），先求出特征值、特征向量并对他们重新排序，然后将求出的特征向量整数化，最后代入通式求解即可。

对问题（2），已知初始情况，分析20年后情况只需对差分方程进行迭代即可。

#### 实验程序

clc

clear all

A = [1 0.5 0; %输入矩阵

0 0.5 1;

0 0 0];

%% 问题（1）代码

[r,lambda] = eig(A); % 求 A 的特征值和对应的特征向量

[lambda\_norm,I] = sort(diag(abs(lambda)),'descend'); %对特征值的绝对值降序排列

temp = diag(lambda);

lambda = temp(I) % 输出按特征值的绝对值降序排列的特征值

r = r(:,I) % 与特征值对应的特征向量

%% 问题（2）代码

x0 = [0.8;

0.2;

0]; %初始矩阵

x20 = A^20\*x0 %20年后的基因分布

#### 实验结果

lambda = 3×1

1.0000

0.5000

0

r = 3×3

1.0000 -0.7071 0.4082

0 0.7071 -0.8165

0 0 0.4082

x20 = 3×1

1.0000

0.0000

0

#### 结果分析

对问题（1），特征值，对应的特征向量线性无关。为了消除小数，将r1转化为如下特征向量：



代入：



当*k*很大时，有，即



说明最终所有个体的基因型均为AA，a基因会被淘汰。

对问题（2）， ，因此若初始分布为0.8，0.2，0，20年后的基因分布已经趋于稳定。

## 实验感想

通过之前的课堂练习和这次的课外实验，我掌握了特征值、特征向量、特征方程、矩阵的对角化等概念和理论，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法，理解了差分方程，并且通过上机实验提高对离散动态系统的理解与分析能力。此外我还复习了不少大一学的线性代数的知识，并学会运用数学知识和MATLAB工具解决实际问题。

我认为这次实验是非常有意义有价值的，通过这次实验，我对代数运算的相关知识和应用有了更深的理解，也学习到了一些新的函数使用办法，比如使用符号矩阵搭配solve()函数比如求特征值特征向量的eig()函数。在运行程序的过程中出了一些报错，我经过仔细核对和调试，最终都解决了它们。在这次实验中涉及到的疑难知识点、用到的新函数我都通过记笔记或者录屏的方式认真记了下来，丰富了我的MATLAB知识储备。在本次实验中，所有的实验均由我独立完成，相关代码和图片结果也都整理到位，代码中存在疑惑的地方以及需要注意的地方均已注释好，以备下次复习时使用。

在这次实验里，我认真完成了5个实验任务，颇有所获，相信未来几次实验会继续收获不少新知识。

6 许柏城 62号 课外练习5

2020-04-19 20:00